Κέντρο Ερευνών Αστρονομίας & Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
της Ακαδημίας Αθηνών

Research Center for Astronomy and Applied Mathematics
of the Academy of Athens

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΣΧΕΤΙΚΙΣΤΙΚΗ ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΑ

ΣΠΥΡΟΣ ΒΑΣΙΛΑΚΟΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ ΕΡΕΥΝΩΝ ΣΤΟ ΚΕΝΤΡΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑΣ & ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΡΟΕΔΡΟΣ & ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ ΤΟΥ ΕΘΝΙΚΟΥ ΑΣΤΕΡΟΣΚΟΠΕΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΚΑΙ ΤΑΝΥΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ…

‘’Επικοινωνία’’ συστημάτων συντεταγμένων

Έστω ότι έχουμε δύο συστήματα συντεταγμένων το άτονο και το τονούμενο σύστημα

$$x^i \rightarrow x'^i \Rightarrow x'^i = x'^i(x^i)$$

Σύμβαση άθροισης Einstein:

$$\sum_i a_i x^i \equiv a_i x^i$$

$$\sum_{ij} a_{ij} x^{ij} \equiv a_{ij} x^{ij}$$

Ανταλλοίωτο (contravariant) διάνυσμα ή τανυστής τάξης: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$A'^a = \frac{\partial x'^a}{\partial x^i} A^i$$

Π.χ. Το ολικό διαφορικό μετασχηματίζεται ως ανταλλοίωτο διάνυσμα

$$dx'^a = \frac{\partial x'^a}{\partial x^i} dx^i$$

Συναλλοίωτο (covariant) διάνυσμα ή τανυστής τάξης: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A'_a = \frac{\partial x^i}{\partial x'^a} A_i$$

Π.χ. Η μερική παράγωγος μετασχηματίζεται ως συναλλοίωτο διάνυσμα

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'^a} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^a} \frac{\partial \phi}{\partial x^i}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ-1: Το εσωτερικό γινόμενο μεταξύ ανταλλοίωτων και συναλλοίωτων διανυσμάτων είναι αναλλοίωτη ποσότητα. Πράγματι εξ ορισμού έχουμε:

$$A'^a \cdot A'_a = \frac{\partial x'^a}{\partial x^i} A^i \frac{\partial x^j}{\partial x'^a} A_j = \frac{\partial x^j}{\partial x^i} A^i \cdot A_j = \delta_i^j A^i \cdot A_j = A^i \cdot A_i$$

Τανυστές 2ης τάξης (πίνακες)

Ανταλλοίωτος τανυστής τάξης $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$A'^{ab} = \frac{\partial x'^a}{\partial x^i}\frac{\partial x'^b}{\partial x^j} A^{ij}$$

Συναλλοίωτος τανυστής τάξης $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$A'_{ab} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^a}\frac{\partial x^j}{\partial x'^b} A_{ij}$$

Μικτός τανυστής τάξης $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A'^a_b = \frac{\partial x'^a}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x'^b} A^i_j$$

ΜΕΤΡΙΚΟΣ ΤΑΝΥΣΤΗΣ

- Έστω ένας χώρος V με dimV=N+1

- Η μετρική (1η θεμελιώδης μορφή) $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$

- Ο συναλλοίωτος μετρικός τανυστής είναι συμμετρικός πίνακας διάστασης (N+1)x(N+1) $g_{ij} = g_{ji} (\forall i \neq j)$

- Ο συναλλοίωτος μετρικός τανυστής μετασχηματίζεται ως εξής

$$g'_{ab} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^a} \frac{\partial x^j}{\partial x'^b} g_{ij}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ-2: Η μετρική του χώρου είναι αναλλοίωτη ποσότητα (δεν εξαρτάται από το σύστημα συντεταγμένων). Πράγματι βασιζόμενοι στο ορισμό των ανταλλοίωτων/συναλλοίωτων διανυσμάτων και του μετρικού τανυστή έχουμε:

$$ds^2 = g'_{ab} dx'^a dx'^b = \left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^a} \frac{\partial x^j}{\partial x'^b} g_{ij} \right) \left(\frac{\partial x'^a}{\partial x^l} dx^l \right) \left(\frac{\partial x'^b}{\partial x^m} dx^m \right)$$

$$ds^2 = g'_{ab} dx'^a dx'^b = \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^l} \frac{\partial x^j}{\partial x^m} g_{ij} \right) \left(dx^l \right) \left(dx^m \right) = \delta^i_l \delta^j_m g_{ij} dx^l dx^m$$

$$ds^2 = g'_{ab} dx'^a dx'^b = g_{ij} dx^i dx^j$$

- Όταν ο χώρος V είναι ισοτροπικός τότε $g_{ij} = 0 (\forall i \neq j)$

- Ο μετρικός τανυστής είναι διαγώνιος πίνακας

$$(g_{ij}) = (g_{00}, g_{11}, \ldots, g_{NN}) \qquad \det(g_{ij}) = g_{00} \cdot g_{11} \cdot \ldots g_{NN}$$

- Εύκολα καταλαβαίνουμε ότι ο αναλλοίωτος μετρικός τανυστής είναι ο αντίστροφος πίνακας του συναλλοίωτου συνεπώς οι συνιστώσες του δίνονται

$$g^{mk} g_{nk} = \delta_n^m \Rightarrow g^{mm} = \frac{1}{g_{mm}}$$

Ο στοιχειώδης όγκος εκφράζεται ως εξής

$$dV_{N+1} = \sqrt{|\det(g_{ij})|} dx^0 \cdot dx^1 \cdot \ldots dx^N$$

ΣΥΝΟΨΗ ΜΕΤΡΙΚΟΥ ΤΑΝΥΣΤΗ ΜΕ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ..

ΕΦΑΡΜΟΓΗ-3: Να υπολογιστούν τα βασικά χαρακτηριστικά του Ευκλείδειου χώρου (**E^2**) σε καρτεσιανές και πολικές συντεταγμένες:

Καρτεσιανές συντεταγμένες

- Μετρική $$ds^2 = (dx^0)^2 + (dx^1)^2$$
- Συναλλοίωτος μετρικός τανυστής $$(g_{ij}) = (g_{00}, g_{11}) = (1,1)$$
$$\det(g_{ij}) = g_{00} \cdot g_{11} = 1$$
- Ανταλλοίωτος μετρικός τανυστής $$g^{00} = \frac{1}{g_{00}} = 1$$
$$g^{11} = \frac{1}{g_{11}} = 1$$

$$dV = \sqrt{|\det(g_{ij})|}\, dx^0 \cdot dx^1 = dx^0 \cdot dx^1$$

Πολικές συντεταγμένες

Το τονούμενο σύστημα συντεταγμένων είναι (r,θ)

$$x^0 = r\cos\theta$$

$$x^1 = r\sin\theta$$

$$(x'^0, x'^1) = (r, \theta)$$

$$g'_{00} \equiv g_{rr} = \left(\frac{\partial x^0}{\partial r}\right)^2 g_{00} + \left(\frac{\partial x^1}{\partial r}\right)^2 g_{11} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$g'_{11} \equiv g_{\theta\theta} = \left(\frac{\partial x^0}{\partial \theta}\right)^2 g_{00} + \left(\frac{\partial x^1}{\partial \theta}\right)^2 g_{11} = r^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = r^2$$

Πολικές συντεταγμένες

Στο τονούμενο (πολικό) σύστημα συντεταγμένων έχουμε:

$$ds^2 = g'_{00}(dx'^0)^2 + g'_{11}(dx'^1)^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

$$(g'_{ij}) = (g'_{00}, g'_{11}) = (1, r^2) \qquad \det(g'_{ij}) = g'_{00} \cdot g'_{11} = r^2$$

$$g'^{00} = \frac{1}{g'_{00}} = 1 \qquad g'^{11} = \frac{1}{g'_{11}} = \frac{1}{r^2}$$

$$dV = \sqrt{|\det(g'_{ij})|}\, dx'^0 \cdot dx'^1 = r dr \cdot d\theta$$

ΣΥΝΑΛΛΟΙΩΤΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ & ΒΑΣΙΚΟΙ ΤΑΝΥΣΤΕΣ ΤΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ..

Συναλλοίτωτη παράγωγος: Διατηρεί την παραλληλία διανυσμάτων έχει συμπεριφορά τανυστή – βασική ποσότητα στη μελέτη καμπύλων χώρων

- Συναλλοίωτη παράγωγος δ/τος

$$A_{\lambda;\nu} = A_{\lambda,\nu} - \Gamma^{\kappa}_{\lambda\nu} A_{\kappa}$$

$$A_{\lambda,\nu} = \frac{\partial A_{\lambda}}{\partial x^{\nu}}$$

- Σύμβολα του Christofell [πλήθος=(dimΧωρου)^3]:

$$\Gamma^{\kappa}_{\lambda\nu} = \frac{1}{2} g^{\kappa\beta} (g_{\beta\nu,\lambda} + g_{\beta\lambda,\nu} - g_{\lambda\nu,\beta}) \qquad g_{\lambda\nu,\beta} = \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\beta}}$$

- Συναλλοίωτη παράγωγος τανυστή 2ης τάξης

$$A_{\lambda\mu;\nu} = A_{\lambda\mu,\nu} - \Gamma^{\kappa}_{\lambda\nu} A_{\kappa\mu} - \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} A_{\lambda\kappa}$$

ΤΑΝΥΣΤΗΣ RICCI

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^{\beta}_{\mu\nu,\beta} - \Gamma^{\beta}_{\mu\beta,\nu} + \Gamma^{\beta}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\beta\lambda} - \Gamma^{\beta}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\beta\nu}$$

ΤΑΝΥΣΤΗΣ EINSTEIN

ΒΑΘΜΩΤΗ ΠΟΣΟΤΗΤΑ RICCI (ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ)

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$$

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Α</u>: Γνωρίζοντας τη μετρική του χώρου υπολογίζουμε τα σύμβολα Christofell (πρώτη παράγωγος) και στη συνέχεια υπολογίζουμε τους τανυστές Ricci και Einstein (δεύτερη παράγωγος)

$$g_{\mu\nu} \to \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} \to R_{\mu\nu} \to G_{\mu\nu}$$

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Β</u>: όλοι οι δείκτες τρέχουν στο σύνολο {0,1,2,…,N}, θυμίζουμε ότι dimV=N+1

ΕΞΙΔΩΣΕΙΣ ΠΕΔΙΟΥ EINSTEIN (ΓΘΣ)

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ

ΤΑΝΥΣΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΟΡΜΗΣ (ΦΥΣΙΚΗ)

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P) u_{\mu} u_{\nu} + P g_{\mu\nu}$$

ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ& ΠΙΕΣΗ ΤΟΥ ΡΕΥΣΤΟΥ

ΔΙΑΝ/ΣΜΑ ΤΕΤΡΑΤΑΧΥΤΗΤΑΣ (1,0,0,0)

<u>Η ΓΘΣ ΕΙΝΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ– ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ & ΦΥΣΙΚΗΣ</u>

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΠΙΠΕΔΕΣ (R=0) ΜΕΤΡΙΚΕΣ

$$ds^2_{E^2} = (dx^0)^2 + (dx^1)^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

Μετρική στον E^2

Μετρική στον E^3

$$ds^2_{E3} = (dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

$$ds^2_{E^3} = ds^2_{E^2} + (dx^2)^2$$

Ο E^2 εμβαπτίζεται στον E^3 . Επίσης η Νευτώνεια Φυσική λαμβάνει χώρα στον Ευκλείδειο χώρο

$$ds^2_{\mathrm{M}} = -c^2 dt^2 + ds^2_{E^3}$$

Μετρική στο χώρο Minkowski (*M*) (Χωρόχρονος Ειδικής θεωρίας σχετικότητας). Ο E^3 εμβαπτίζεται στον *M*

ΕΦΑΡΜΟΓΗ-4: Να υπολογιστούν οι συνιστώσες του τανυστή Einstein στην σφαίρα **(S^2)**

Μετρική της σφαίρας (S^2)

$$ds^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Σύστημα συντεταγμένων

$$(x^0, x^1) = (\theta, \phi)$$

$$\{\mu, \nu\} = \{0,1\}$$

Εφαρμόζω την ακολουθία υπολογισμών

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} \rightarrow R_{\mu\nu} \rightarrow G_{\mu\nu}$$

$$(g_{\mu\nu}) = (g_{00}, g_{11}) = (r^2, r^2 \sin^2\theta)$$

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{g_{\mu\nu}}$$

$$dV = \sqrt{|\det(g_{\mu\nu})|}\, d\theta \cdot d\phi$$

Υπολογίζω τα σύμβολα Christofell. Πλήθος 8 από αυτά μόνο τα 3 είναι μη μηδενικά.

$$\Gamma^{\kappa}_{\lambda\nu} = \frac{1}{2} g^{\kappa\beta} (g_{\beta\nu,\lambda} + g_{\beta\lambda,\nu} - g_{\lambda\nu,\beta})$$

Ορισμός

$$\Gamma^{1}_{10} = \frac{1}{2} g^{1\beta} (g_{\beta 0,1} + g_{\beta 1,0} - g_{10,\beta})$$

Αναγκαστικά ο δείκτης β=1 (δες ανταλλοίωτες συνιστώσες)

$$\Gamma^{1}_{10} = \Gamma^{1}_{01} = \frac{1}{2} g^{11} g_{11,0} = \frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^0} = \frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial \theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\Gamma^{0}_{11} = \frac{1}{2} g^{0\beta} (g_{\beta 1,1} + g_{\beta 1,1} - g_{11,\beta}) = -\frac{1}{2} g^{00} g_{11,0} = -\sin\theta\cos\theta$$

ΤΑΝΥΣΤΗΣ RICCI

$$R_{\mu\nu}=\Gamma^{\beta}_{\mu\nu,\beta}-\Gamma^{\beta}_{\mu\beta,\nu}+\Gamma^{\beta}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\beta\lambda}-\Gamma^{\beta}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\beta\nu}$$

$$R_{00}=\Gamma^{\beta}_{00,\beta}-\Gamma^{\beta}_{0\beta,0}+\Gamma^{\beta}_{00}\Gamma^{\lambda}_{\beta\lambda}-\Gamma^{\beta}_{0\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\beta 0}$$

Επιβιώνουν τα β=λ=1

$$R_{00}=-\Gamma^{1}_{01,0}-\Gamma^{1}_{01}\Gamma^{1}_{10}=\frac{1-\cos^{2}\theta}{\sin^{2}\theta}=1$$

Όμοια υπολογίζουμε και τη δεύτερη συνιστώσα

$$R_{11}=\sin^{2}\theta$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} = \frac{2}{r^2}$$

Βαθμωτό πεδίο Ricci (καμπυλότητα)

$$G_{00} \equiv R_{00} - \frac{1}{2} R g_{00} = 1 - \frac{r^2}{r^2} = 0$$

$$G_{11} \equiv R_{11} - \frac{1}{2} R g_{11} = 0$$

Συμπέρασμα: Ο τανυστής Einstein στη δισδιάστατη σφαίρα είναι μηδέν

ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΛΥΣΗΣ Schwarzschild..

- Σφαιρικά Συμμετρική
- Στατική μετρική (συνιστώσες του μετρικού τανυστή δεν εξαρτώνται από τον χρόνο) $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(r, \theta, \phi)$
- Απομονωμένη (vacuum solution) $\mathrm{T}_{\mu\nu} = 0$
- Υπό τις άνω συνθήκες οι εξισώσεις πεδίου δίνονται

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} = 0$$

Μετρική Schwarzchild

$$ds^2 = B(r)dt^2 + A(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Σύστημα συντεταγμένων

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, r, \theta, \phi)$$

$$\{\mu, \nu\} = \{0,1,2,3\}$$

Εφαρμόζω την ακολουθία υπολογισμών

$$g_{\mu\nu} \to \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} \to R_{\mu\nu} \to G_{\mu\nu}$$

$$(g_{\mu\nu}) = (g_{00}, g_{11}, g_{22}, g_{33}) = (B, A, r^2, r^2\sin^2\theta)$$

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{g_{\mu\nu}}$$

$$dV = \sqrt{|\det(g_{\mu\nu})|}dt \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\phi$$

Υπολογίζω τα σύμβολα Christofell. Πλήθος 64 με τα περισσότερα μηδενικά. Ενδεικτικά υπολογίζω εδώ κάποια σύμβολα …

$$\Gamma^{\kappa}_{\lambda\nu} = \frac{1}{2} g^{\kappa\beta} \left(g_{\beta\nu,\lambda} + g_{\beta\lambda,\nu} - g_{\lambda\nu,\beta} \right)$$

Ορισμός

$$\Gamma^{1}_{11} = \frac{1}{2} g^{1\beta} \left(g_{\beta 1,1} + g_{\beta 1,1} - g_{11,\beta} \right)$$

Αναγκαστικά ο δείκτης β=1 (δες ανταλλοίωτες συνιστώσες)

$$\Gamma^{1}_{11} = \frac{1}{2} g^{11} g_{11,1} = \frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^{1}} = \frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial r} = \frac{dA/dr}{2A(r)}$$

$$\Gamma^{1}_{00} = \frac{1}{2} g^{1\beta} \left(g_{\beta 0,0} + g_{\beta 0,0} - g_{00,\beta} \right) = -\frac{1}{2} g^{11} g_{00,1} = -\frac{dB/dr}{2A(r)}$$

Αφού ολοκληρώσω τα σύμβολα Christofell. Υπολογίζω τις συνιστώσες του τανυστή Ricci και εφαρμόζω τις εξισώσεις πεδίου. Πλήθος μη μηδενικών εξισώσεων 4 μόνο οι δύο είναι ανεξάρτητες

$$R_{00} = 0, R_{11} = 0, R_{22} = 0, R_{33} = 0$$

Εξισώσεις πεδίου

$$\frac{dA}{dr}B + A\frac{dB}{dr} = 0 \Rightarrow A(r)B(r) = const.$$

1η ανεξάρτητη Εξισώση

$$r\frac{dA}{dr} = A(1 - A) \Rightarrow A(r) = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1}$$

2η ανεξάρτητη Εξισώση

$$B(r) = const. \times \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)$$

ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ – ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΤΑΘΕΡΩΝ

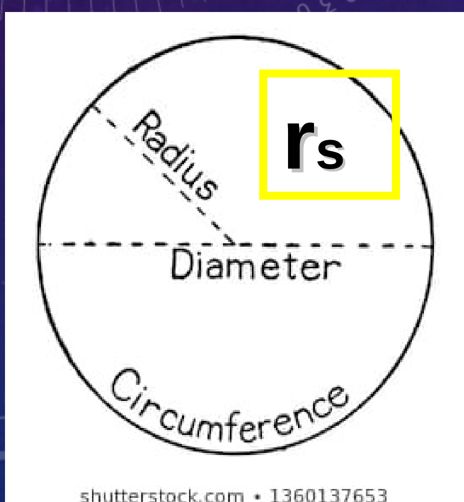
$$(Schwarzschild)_{r\to\infty} \to$$ **Minkowski**

$$\lim_{r\to\infty} B(r) = -c^2 \Rightarrow \lim_{r\to\infty} \frac{const.}{A(r)} = -c^2 \Rightarrow const. = -c^2$$

$$\lim_{r\to\infty} A(r) = 1$$

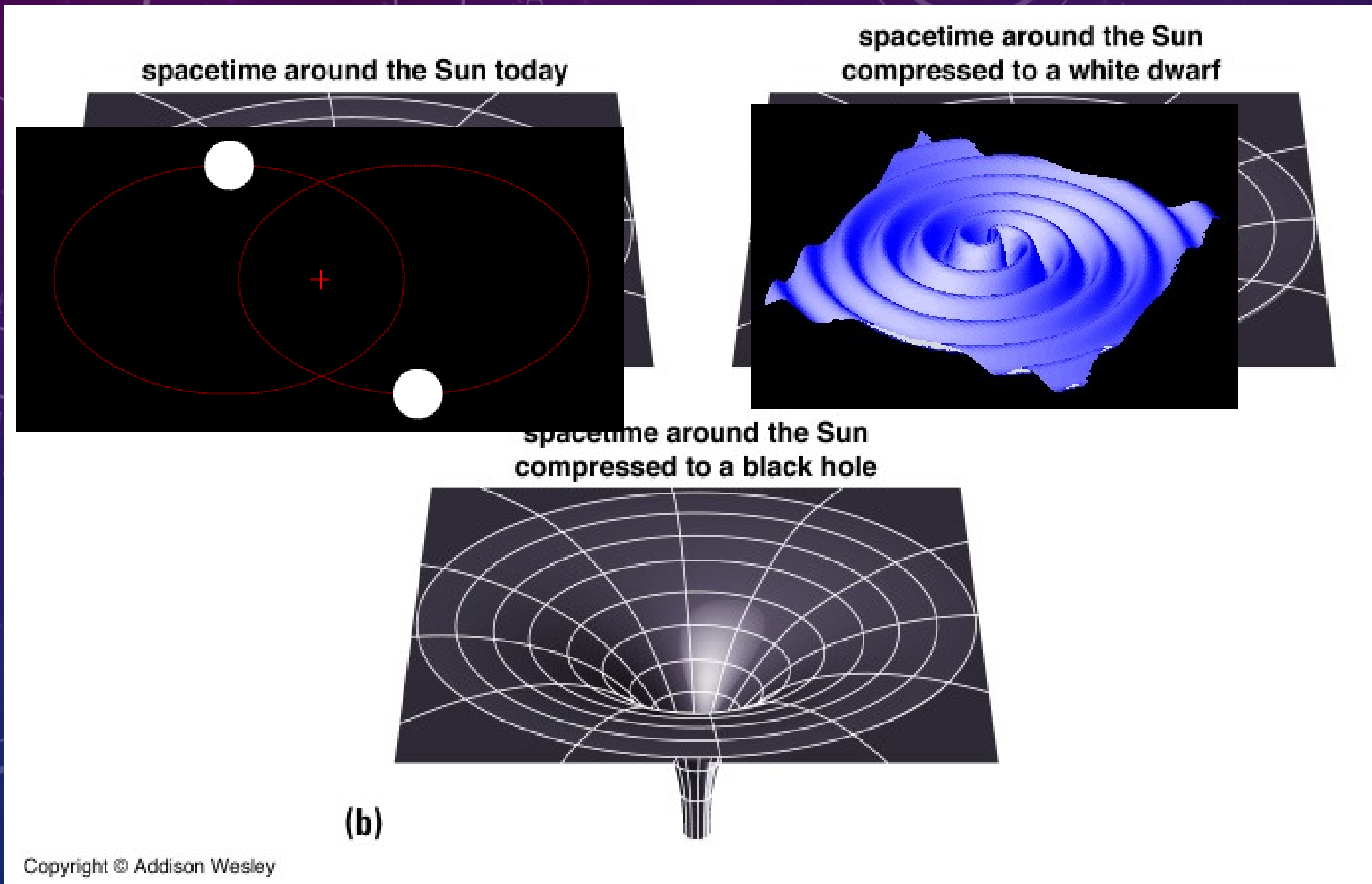
$$\lim_{r\to r_s} A(r) = +\infty$$

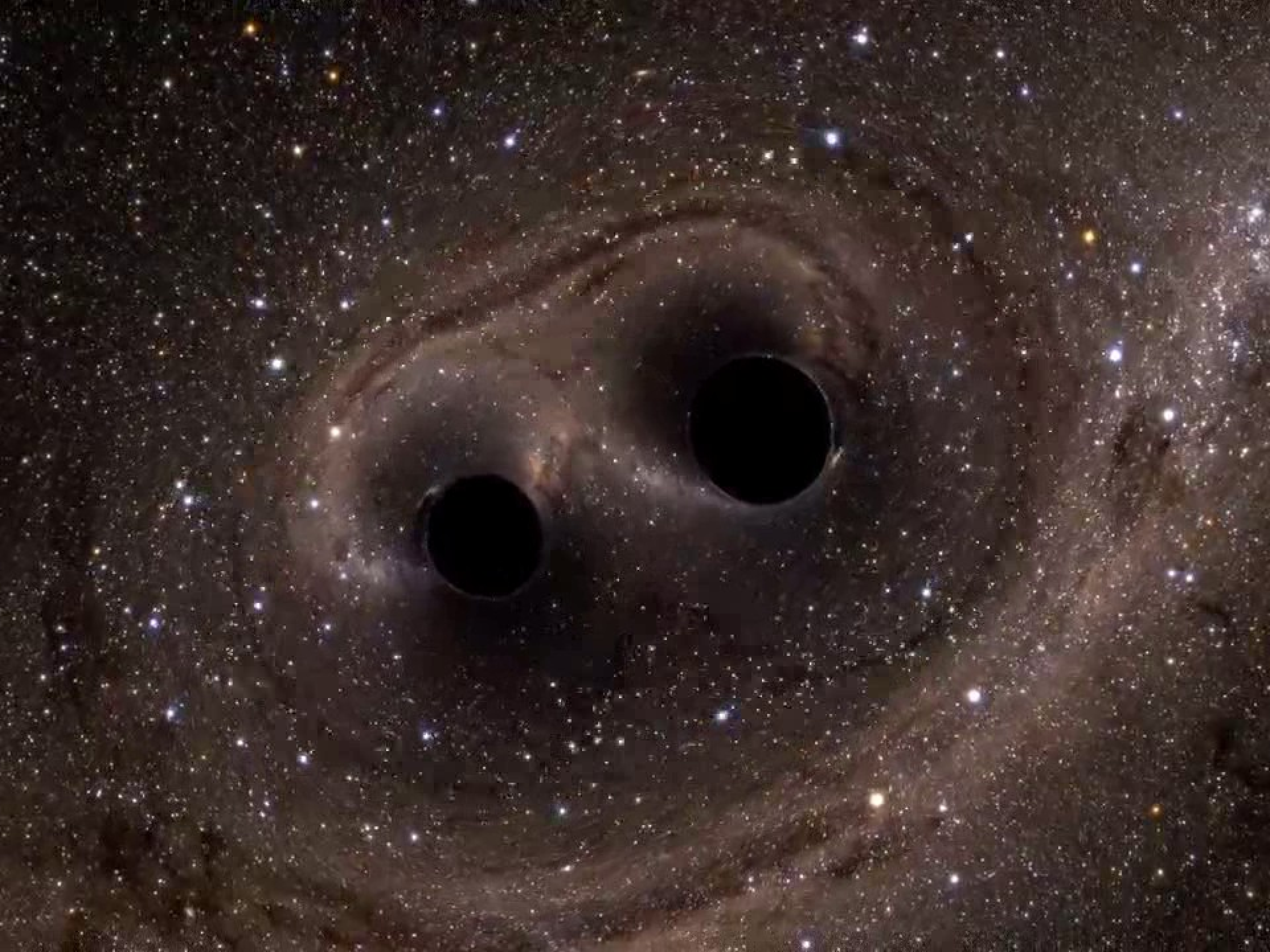
Έχουμε μια μαθηματική ανωμαλία (ορίζοντα γεγονότων). Η χαρακτηριστική τιμή r_s ονομάζεται ακτίνα Schwarzchild, ενώ η ταχύτητα διαφυγής είναι ίση με c

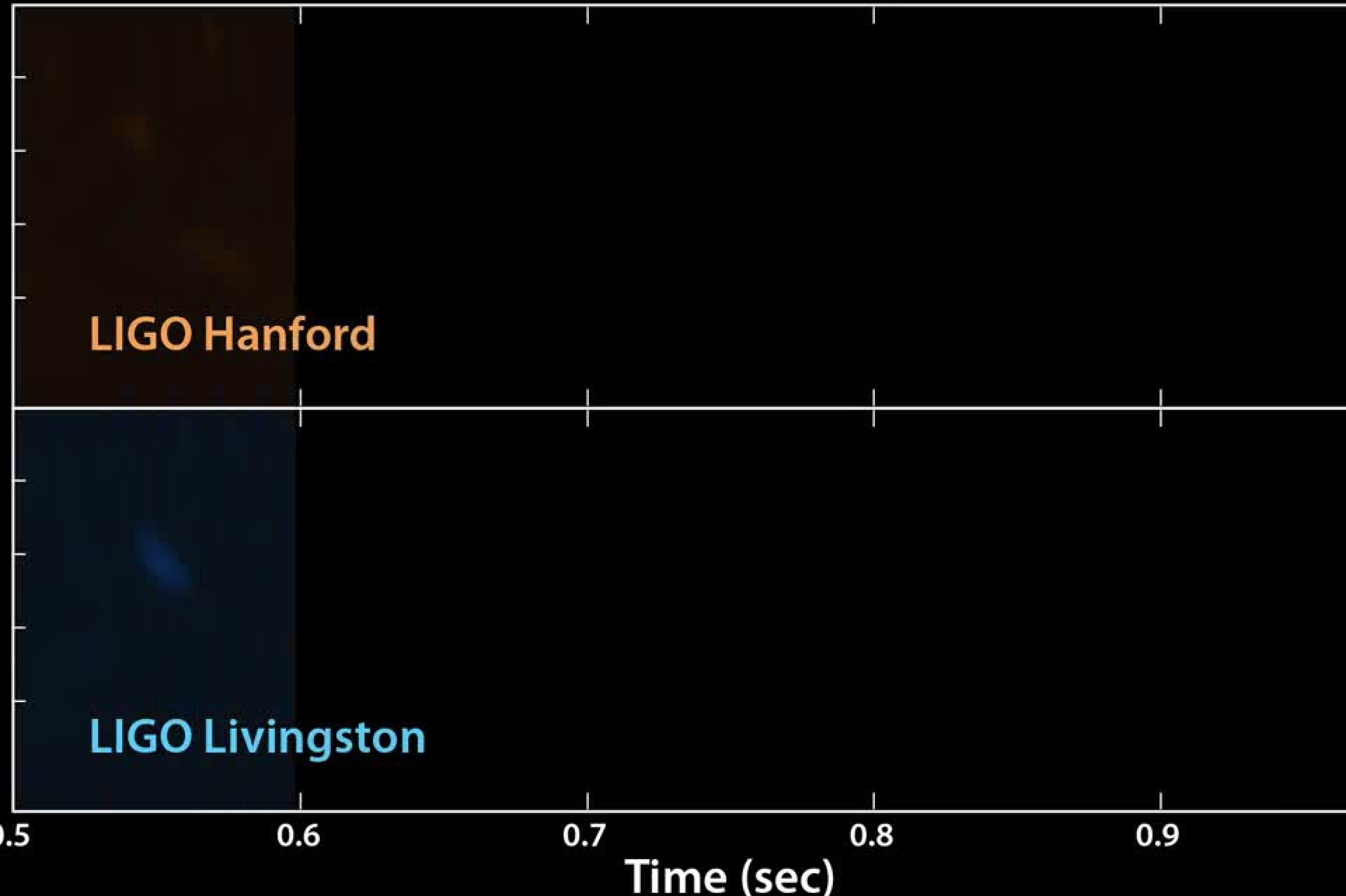


$$U_\delta^2 = \frac{2GM}{r} \xrightarrow[(U_\delta = c)]{(r = r_s)} r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΚΑΙ ΒΑΡΥΤΗΤΑ (Γ. Θ. ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ) ερμηνεύει τον μακρόκοσμο







LIGO Hanford
LIGO Livingston
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
Time (sec)

ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΚΗΣ ΜΕΤΡΙΚΗΣ Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW)..

- Σφαιρικά Συμμετρική
- εξελισσόμενη μετρική (οι συνιστώσες του μετρικού τανυστή εξαρτώνται από τον χρόνο) $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(t, r, \theta, \phi)$
- Περιγράφει τη μετρική του χωρόχρονου μέσα στον οποίο το Σύμπαν εμβαπτίζεται

Μετρική FLRW

$$dV = \sqrt{|\det(g_{\mu\nu})|}\, dt \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\phi$$

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right]$$

Παράγοντας κλίμακας

Χωρική καμπυλότητα
K={-1,0,+1}

$$\{\mu,\nu\} = \{0,1,2,3\}$$

Σύστημα συντεταγμένων

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, r, \theta, \phi)$$

Εφαρμόζω την ακολουθία υπολογισμών

$$g_{\mu\nu} \to \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} \to R_{\mu\nu} \to G_{\mu\nu}$$

$$(g_{ij}) = (g_{00}, g_{11}, g_{22}, g_{33}) = (-c^2, \frac{a^2}{1-Kr^2}, a^2 r^2, a^2 r^2 \sin^2\theta)$$

$$c \equiv 1$$

Υπολογίζω τα σύμβολα Christofell.Πλήθος 64 με τα περισσότερα 0. Ενδεικτικά υπολογίζω εδώ κάποια σύμβολα …

$$\Gamma^{\kappa}_{\lambda\nu} = \frac{1}{2} g^{\kappa\beta} (g_{\beta\nu,\lambda} + g_{\beta\lambda,\nu} - g_{\lambda\nu,\beta})$$

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{g_{\mu\nu}}$$

$$\Gamma^{1}_{11} = \frac{1}{2} g^{1\beta} (g_{\beta 1,1} + g_{\beta 1,1} - g_{11,\beta})$$

Αναγκαστικά ο δείκτης β=1 (δες ανταλλοίωτες συνιστώσες)

$$\Gamma^{0}_{11} = \frac{1}{2} g^{0\beta} (g_{\beta 1,1} + g_{\beta 1,1} - g_{11,\beta}) = -\frac{1}{2} g^{00} g_{11,0} = \frac{\dot{a}a}{1-Kr^2} = \frac{a^2 H}{1-Kr^2}$$

$$\Gamma^{1}_{11} = \frac{1}{2} g^{11} g_{11,1} = \frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} = \frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial r} = \frac{Kr}{1-Kr^2}$$

Αφού ολοκληρώσω τα σύμβολα Christofell. Υπολογίζω τις συνιστώσες του τανυστή Ricci και εφαρμόζω τις εξισώσεις πεδίου.

$$R_{00} = -3\left(H^2 + \dot{H}\right) \qquad R_{ij} = \left(3H^2 + \dot{H} + \frac{2K}{a^2}\right) g_{ij}$$

$$\{i, j\} = \{1,2,3\} \qquad R_{ij} = 0, (\forall i \neq j) \qquad R_{i0} = R_{0i} = 0$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = 6\left(2H^2 + \dot{H} + \frac{K}{a^2}\right)$$

Η καμπυλότητα Ricci εξαρτάται από τον κοσμικό χρόνο ενώ η χωρική καμπυλότητα (K) είναι σταθερή

Παράμετρος Hubble

$$\mathrm{H}(t) = \frac{\dot{a}}{a} \qquad \dot{\mathrm{H}} = \frac{\ddot{a}a - \dot{a}^2}{a^2} \Rightarrow \frac{\ddot{a}}{a} = H^2 + \dot{H}$$

ΕΞΙΔΩΣΕΙΣ ΠΕΔΙΟΥ EINSTEIN (ΓΘΣ)

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P) u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu}$$

ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ ΤΑΝΥΣΤΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΟΡΜΗΣ

$$T_{00} = (\rho + P) u_0 u_0 + P g_{00} = \rho$$

ΔΙΑΝ/ΣΜΑ ΤΕΤΡΑΤΑΧΥΤΗΤΑΣ (1,0,0,0)

$$T_{ij} = (\rho + P) u_i u_j + P g_{ij} = P g_{ij}$$

$$R_{00} - \frac{1}{2} R g_{00} = 8\pi G T_{00} \Rightarrow -3\left(\mathrm{H}^2 + \dot{\mathrm{H}}\right) + 3\left(2\mathrm{H}^2 + \dot{\mathrm{H}} + \frac{\mathrm{K}}{\alpha^2}\right) = 8\pi G \rho$$

$$\mathrm{H}^2 = \frac{8\pi G \rho}{3} - \frac{\mathrm{K}}{\alpha^2}$$

1^{η} εξίσωση του Friedmann

Έπειτα για τις άλλες συνιστώσες

$$R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} = 8\pi G T_{ij} \Rightarrow$$

$$\left(3\mathrm{H}^2 + \dot{\mathrm{H}} + \frac{2\mathrm{K}}{\alpha^2}\right) g_{ij} - 3\left(2\mathrm{H}^2 + \dot{\mathrm{H}} + \frac{\mathrm{K}}{\alpha^2}\right) g_{ij} = 8\pi G P g_{ij} \Rightarrow$$

$$2\left(\mathrm{H}^2 + \dot{\mathrm{H}}\right) + H^2 + \frac{\mathrm{K}}{\alpha^2} = -8\pi G P \Rightarrow$$

Εισάγωντας την 1η εξίσωση του Friedmann

$$\mathrm{H}^2 + \dot{\mathrm{H}} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + 3P\right) \Rightarrow \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + 3P\right)$$

2η εξίσωση του Friedmann

Με συνδυασμό των εξισώσεων Friedmann υπολογίζουμε την εξίσωση συνέχειας

Σε τανυστικό πλαίσιο η συναλλοίωτη παράγωγος του τανυστή ενέργειας ορμής είναι μηδέν

$$T^{\mu}_{\nu;\mu} = 0 \Rightarrow \quad \dot{\rho} + 3\mathrm{H}(\rho + P) = 0$$

Εξίσωση συνέχειας

$$\mathrm{H}^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{\mathrm{K}}{\alpha^2}$$

Εξισώσεις του Friedmann

$$\mathrm{H}^2 + \dot{\mathrm{H}} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) \Rightarrow \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P)$$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΧΩΡΙΚΗΣ ΜΕΤΡΙΚΗΣ Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW)..

$$ds^2 = -c^2dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right]$$

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dl^2 \Rightarrow$$

Εξελισσόμενη Χωρική μετρική

$$dl^2 = a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right]$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ-5: Να υπολογιστούν η επιφάνεια και ο όγκος για τη χωρική μετρική FLRW

A) K=0: επίπεδος (flat) Ευκλείδειος χώρος

$$dl^2 = a^2(t)[dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)]$$

$$S_{K=0} = 4\pi G a^2 r^2$$

$$V_{K=0} = \frac{4\pi G}{3} a^3 r^3$$

B) K=+1: κλειστός (closed) χώρος πεπερασμένου όγκου. Αλλαγή μεταβλητής r=sinx

$$x \in [0, 2\pi]$$

$$dl^2 = a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right]$$

$$dl^2 = a^2(t)[dx^2 + \sin^2 x(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)]$$

$$dS_{+1} = a^2 \sin^2 x \sin\theta d\theta d\phi \Rightarrow$$

$\boxed{\text{ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ}}$

$$S_{+1} = a^2 \sin^2 x \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta = 4\pi a^2 \sin^2 x$$

$$\left(\gamma\iota\alpha \rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow S_{+1}^{\max} = 4\pi a^2$$

ΟΓΚΟΣ

$$dV_{+1} = a\,dx\,dS_{+1} = a^3 \sin^2 x \sin\theta\, dx\, d\theta\, d\phi \Rightarrow$$

$$V_{+1} = a^3 \int_0^x \sin^2 y\, dy \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta = 4\pi a^3 \int_0^x \sin^2 y\, dy \Rightarrow$$

$$V_{+1} = 4\pi a^3 \int_0^x \frac{1-\cos 2y}{2}\, dy = 2\pi a^3 \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right)$$

$$(\gamma\iota\alpha \rightarrow x = \pi) \Rightarrow V_{+1}^{\max} = 2\pi^2 a^3$$

$$(\gamma\iota\alpha \rightarrow x = 0) \Rightarrow V_{+1} = 0 - [\pi\acute{o}\lambda o\varsigma]$$

Ο χώρος έχει πέρατα

Γ) K=-1: ανοικτός (open) χώρος. Αλλαγή μεταβλητής r=sinhx

$$x \in [0,+\infty)$$

$$dl^2 = a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right]$$

$$dl^2 = a^2(t)[dx^2 + \sinh^2 x(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)]$$

$$dS_{-1} = a^2 \sinh^2 x \sin\theta d\theta d\phi \Rightarrow$$

$\boxed{\text{ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ}}$

$$S_{-1} = a^2 \sinh^2 x \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta = 4\pi a^2 \sinh^2 x$$

ΟΓΚΟΣ

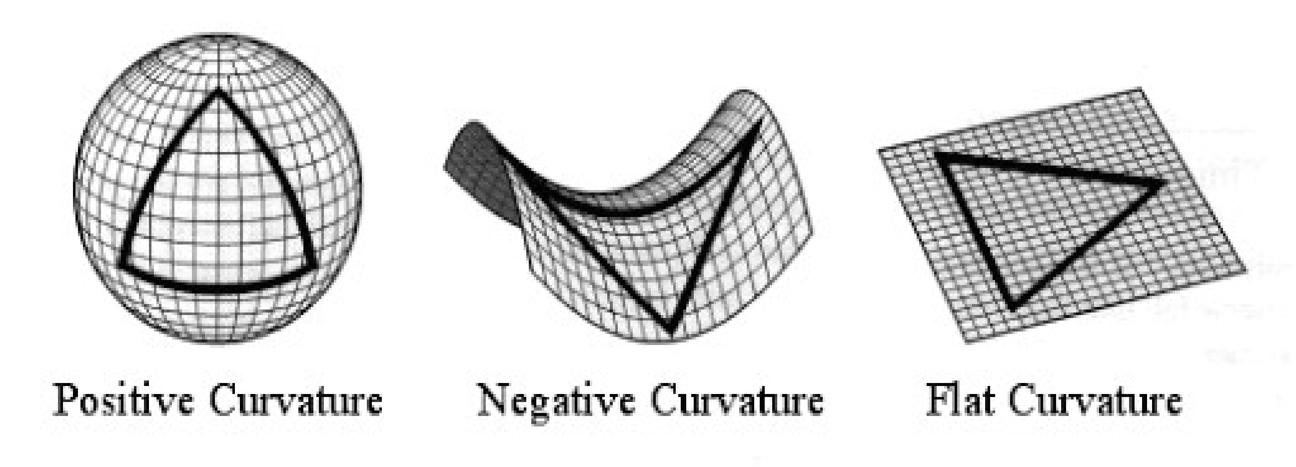
$$dV_{-1} = a\,dx\,dS_{-1} = a^3 \sinh^2 x \sin\theta\, dx\, d\theta\, d\phi \Rightarrow$$

$$V_{-1} = a^3 \int_0^x \sinh^2 y\, dy \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta = 4\pi a^3 \int_0^x \sinh^2 y\, dy \Rightarrow$$

$$V_{-1} = 4\pi a^3 \int_0^x \frac{\cosh 2y - 1}{2} dy = 2\pi a^3 \left(-x + \frac{\sinh 2x}{2} \right)$$

$$\left(\gamma\iota\alpha : x \to +\infty \right) \Rightarrow V_{-1} \to +\infty$$

Ο χώρος δεν έχει πέρατα



$$S_{+1} < S_0 < S_{-1}$$

$$V_{+1} < V_0 < V_{-1}$$